

به نام او

دومین مسابقه پرش پیکار ریاضیات شهری

خانه ریاضیات تهران

دانشگاه صنعتی شریف، ۶ آبان ۱۳۹۵

با یک تماس تلفنی شروع شد!

عصر پنج‌شنبه یک روز پاییزی

- پینوکیو: الو! بفرماید!
- روباه مکار: سلام پینوکیو جون! خوبی؟ دلم برات یه ذره شده بود، بی‌معرفت!
- پینوکیو: خیلی ممنون! شما؟!!
- روباه مکار: عجب! نشناختی؟! من روباهه هستم، رفیق قدیمی‌ت! یه قرار بذار هم رو ببینیم؛ فردا جمعه، ساعت ۱۰ صبح خوبه یا ۵ عصر؟...
- پینوکیو: فردا؟! کجا؟...
- جمعه ۱۰:۳۰ صبح، در یک کافی‌شاپ
- روباه مکار: ... خب، نظرت چیه؟
- پینوکیو: آخه یاد ماجرای سکه‌های طلا و درخت پول می‌افتم!...
- گربه نره: درخت پول رو فراموش کن! ما داریم بهت محصولات یه شرکت معتبر رو معرفی می‌کنیم: شامپو، پوشک بچه، تله‌موش،... تازه بعدش کافیه کار رو به پدر ژپتو و پری مهربون معرفی کنی و چند هفته بعد... اگه اونا هم نسل دومی بودن، تو کلی عروسک می‌شناسی که بهت اعتماد دارن...
- روباه مکار: می‌دوننی پیره‌مرده بدش نمی‌آد دیگه کار نکنه. وقتی تو پول‌دار بشی و با یه کیسه پول برگردی خونه، وای که چه قدر خوش حال می‌شه! اون دیگه خیلی ضعیف و پیر شده، باید کاری کنیم که خوش حال بشه. حالا راضی شدی؟
- پینوکیو: اووووم!

تاریخچه

داستان شرکت‌های هرمی در ایران به اواخر دهه ۷۰ شمسی و شرکتی ایتالیایی به نام پنتاگونو می‌رسد. پس از آن شرکت‌هایی چون گلدکوئست، مای‌سون‌دایموندز و چند شرکت داخلی افراد بسیاری را در ایران جذب کردند و هر چند درصد کمی از اعضای خود را به سودهایی چشم‌گیر رساندند ولی اکثریت پول و وقت و آبروی خود را از دست دادند. در چنین شرایطی مجلس شورای اسلامی وارد ماجرا شد و با اضافه کردن بند «ز» به قانون مجازات اخلال‌گران در نظام اقتصادی کشور مصوب ۱۳۶۹ این نوع فعالیت‌ها را ممنوع اعلام کرد و پس از آن «تأسیس، قبول نمایندگی و عضوگیری در بنگاه، مؤسسه، شرکت یا گروه به منظور کسب درآمد ناشی از افزایش اعضاء به نحوی که اعضای جدید جهت کسب منفعت افراد دیگری را جذب نموده و توسعه زنجیره یا شبکه انسانی تداوم یابد» اخلال در نظام اقتصادی کشور محسوب می‌شوند. این قانون در تاریخ ۱۳۸۴/۱۱/۴ به تأیید شورای نگهبان رسید.

فعالیت‌های هرمی در جهان تاریخچه‌ای طولانی دارد و پس از گسترش در هر منطقه یا کشوری به ناچار یا به مناطق دیگر سرایت کرده یا مردم به کلاه‌بردارانه بودن آن پی برده‌اند. در مواردی نیز کلاه‌برداران با تغییر نام و ظاهر کار خود پس از مدتی بازگشته‌اند. در مقاطعی که کشورها با رکود اقتصادی و بی‌کاری مواجه بوده‌اند، مانند دهه ۳۰ میلادی در آمریکا و دهه ۹۰ میلادی در کشورهای اروپای شرقی پس از فروپاشی شوروی، شرکت‌های هرمی رونق یافتند و بعضاً موجب بحران‌های اقتصادی و اجتماعی فراگیری شدند.

۱ یک مثال تاریخی

یاکوو ایسیدوروویچ پرلمان، ریاضی‌دانی روس است که از ۱۸۸۲ تا ۱۹۴۲ میلادی زندگی می‌کرده و آثار ارزش‌مندی در زمینه ریاضیات و فیزیک برای خوانندگان غیرمتخصص تألیف کرده است. او در کتاب «ریاضیات زنده» داستان جالبی را ذکر می‌کند:

دوچرخه‌های ارزان

در کشور روسیه، در سال‌های قبل از حکومت شوروی (به احتمالی هم اکنون در بعضی کشورهای دیگر) کسانی بودند که برای فروش کالاهای خود، دست به ابتکارهای جالبی می‌زدند. آن‌ها کار خود را از این‌جا آغاز می‌کردند که مثلاً در روزنامه‌ها و مجله‌های پرتیراژ آگهی زیر را تبلیغ می‌کردند:

هر کس می‌تواند با پرداخت ۱۰ روبل مالک دوچرخه شود.

از این موقعیت استفاده کنید!

به جای ۴۰ روبل فقط ۱۰ روبل

شرایط خرید به طور مجانی در اختیار شما گذاشته می‌شود.

کم نبودند کسانی که... درخواست می‌کردند که مؤسسه، شرایط این خرید غیرعادی را برای آن‌ها بفرستد و می‌فهمیدند که: برای آن‌ها در مقابل ۱۰ روبل دوچرخه فرستاده نمی‌شد، بلکه ۴ بلیت داده می‌شد که باید هر یک از آن‌ها را به یکی از آشنایان خود بفروشنند. ۴۰ روبل که به این ترتیب جمع می‌شد، باید به مؤسسه تحویل داده می‌شد تا دوچرخه برای آن‌ها فرستاده شود. به این ترتیب به‌راستی، دوچرخه برای خریدار ۱۰ روبل تمام می‌شد. زیرا ۴۰ روبل بقیه را او از جیب خود پرداخته بود.

در حقیقت علاوه بر پرداخت ۱۰ روبل پول نقد، خریدار می‌بایستی زحمت فروش بلیت‌ها را به آشنایان خود تحمل کند. موضوع این بلیت‌ها چه بود؟ کسی که آن‌ها را می‌خرد، در مقابل پرداخت ۱۰ روبل چه نفعی می‌برد؟ در حقیقت، صاحب هر بلیت، این حق را داشت که در مؤسسه آن را با ۴ بلیت دیگر معاوضه کند و این امکان را به دست آورد که ۴۰ روبل برای تهیه دوچرخه فراهم کند، در حالی که در مقابل آن تنها ۱۰ روبل پرداخته بود (یعنی قیمت بلیت). صاحبان بلیت‌های جدید هم این حق را داشتند که در مقابل بلیت خود ۴ بلیت برای انتشار دریافت کنند و الی آخر.

در نگاه اول، هیچ‌گونه نیرنگی به چشم نمی‌خورد؛ وعده تبلیغ‌ها انجام می‌شد و دوچرخه برای خریدار، تنها ۱۰ روبل تمام می‌شد. مؤسسه هم در این زمینه ضرر نمی‌کرد، زیرا در مقابل کالای خودش قیمت کامل آن را می‌گرفت. ولی در حقیقت، همه این بازی‌ها بدون تردید یک تقلب و حقه‌بازی است. این کلاه برداری بر این پایه است که...

۱,۲ فرض کنید فروش ۴ بلیت به آشنایان یک ماه طول بکشد. اگر در آن سال‌ها در روسیه ۵۰ میلیون نفر مایل

به خریدن «دوچرخه‌های ارزان» بوده باشند، چند سال طول می‌کشد همه متقاضیان صاحب بلیت شوند؟

۱,۳ در آن مقطع چند نفر بلیت دارند ولی دوچرخه ندارند؟

۱,۴ چند نفر دوچرخه دارند ولی برخی معرفی‌شدگان آن‌ها بدون دوچرخه هستند؟

۱,۵ اگر به جای جمعیت ۵۰ میلیونی آن زمان، جمعیت امروز جهان، یعنی ۷ میلیارد نفر، لحاظ شود، جواب سه سؤال قبل را به دست آورید.

۱,۶ نقدی بر فرضیات محاسبه، از جمله ثابت فرض کردن زمان یافتن ۴ مشتری برای بلیت در هر ماه در کل دوره محاسبه دارید؟

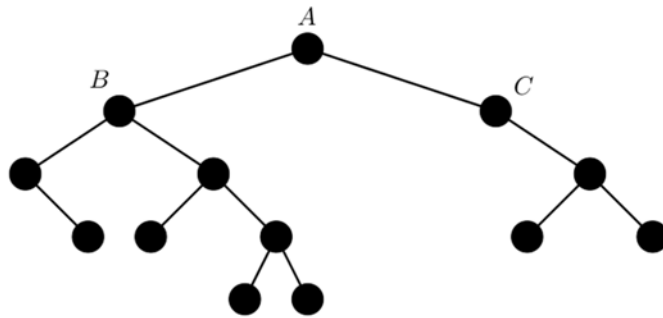
۲ مدل رشد منظم

شرکت «بازاریابان کهنکشانان روگر» (روبا مکار و گر به نره) در سایت شرکت خود اعلام کرده است:

- هر نفر می تواند با پرداخت ۱ میلیون تومان بلیت شهر بازی جادویی را بخرد و عضو شرکت شود.
- هر عضو می تواند دو نفر را عضو شرکت کند و آن ها زیرشاخه های مستقیم آن عضو نامیده می شوند.
- زیرشاخه های زیرشاخه های یک عضو و نیز زیرشاخه های آن ها و...، زیرشاخه های غیرمستقیم آن عضو گفته می شوند.

- مفهوم عدد تعادل: فرض کنید شخص A دارای دو زیرشاخه مستقیم B و C است. تعداد زیرشاخه های مستقیم و غیرمستقیم B با احتساب خود B را m نفر فرض کنید و تعداد زیرشاخه های مستقیم و غیرمستقیم C با احتساب خود C را n نفر فرض کنید. در این صورت، مینیمم دو عدد m و n را عدد تعادل A می گوئیم.

- هرگاه عدد تعادل یک شخص به ۱۵ برسد، ۱۰ میلیون تومان جایزه می گیرد.
- اعضای شرکت و رابطه زیرشاخه بودن را می توان با یک نمودار درختی به شکل زیر نشان داد. مثلاً در نمودار درختی زیر، عدد تعادل A برابر با ۴ است.



۲,۱ گیریم در چنین شرکتی n_0 عضو بدون زیرشاخه باشند، n_1 عضو فقط یک زیرشاخه مستقیم داشته باشند و n_2 عضو، دو زیرشاخه مستقیم داشته باشند. روابطی به شکل برابری و نابرابری بین این اعداد به دست آورید. برای پاسخ دادن به سه سؤال بعد، فرض کنید درخت اعضاء به طور منظم رشد کرده باشد؛ هر کس عضو شرکت می شود، در هفته بعد دو نفر را عضو شرکت می کند. فرض کنید در ابتدا یک نفر عضو شرکت بوده است و پس از n هفته نمودار درختی اعضاء را در نظر بگیرید.

۲,۲ روشن است که همواره افرادی هستند که هنوز موفق به دریافت جایزه نشده اند. این افراد چه نسبتی از کل اعضای شرکت هستند؟

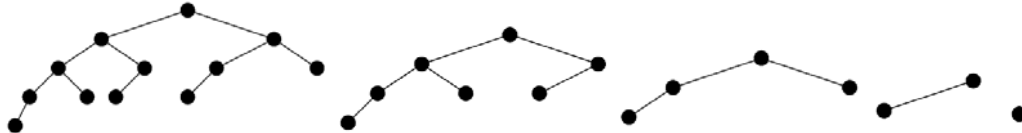
۲,۳ چه نسبتی از افراد جایزه را می گیرند ولی زیرشاخه مستقیمی دارند که سرش کلاه رفته است؟

۲,۴ شرکت پس از n هفته چه قدر سود به دست آورده است؟

۳ مدل رشد نامنظم

پاسخ شما به قسمت‌های قبل با این فرض بود که درخت به صورت منظم رشد می‌کند. اما در دنیای واقعی چنین اتفاقی نمی‌افتد. بنابراین سعی می‌کنیم مدل واقعی‌تری ارائه کنیم که در آن درخت به صورت نامنظم رشد می‌کند.

مدل رشد نامنظم: فرض کنید هر کس که عضو شرکت می‌شود، تا هفته بعد یک نفر را عضو شرکت می‌کند و یک هفته بعد از آن نیز یک نفر دیگر را عضو شرکت می‌کند.



۳,۱ سعی کنید تعداد اعضای شرکت را تا هفته بیستم محاسبه کنید.

۳,۲ تعداد اعضای شرکت هر هفته چند برابر می‌شود؟ این نسبت را برای چندین هفته متوالی محاسبه کنید. چه چیزی مشاهده می‌کنید؟

۳,۳ سعی کنید مشاهدات قسمت قبل را تحلیل کنید و به شکل ریاضی توضیح دهید.

۳,۴ در مدل رشد نامنظم، وقتی رشد درخت اعضاء متوقف می‌شود، تقریباً چه نسبتی از اعضاء ضرر کرده‌اند؟

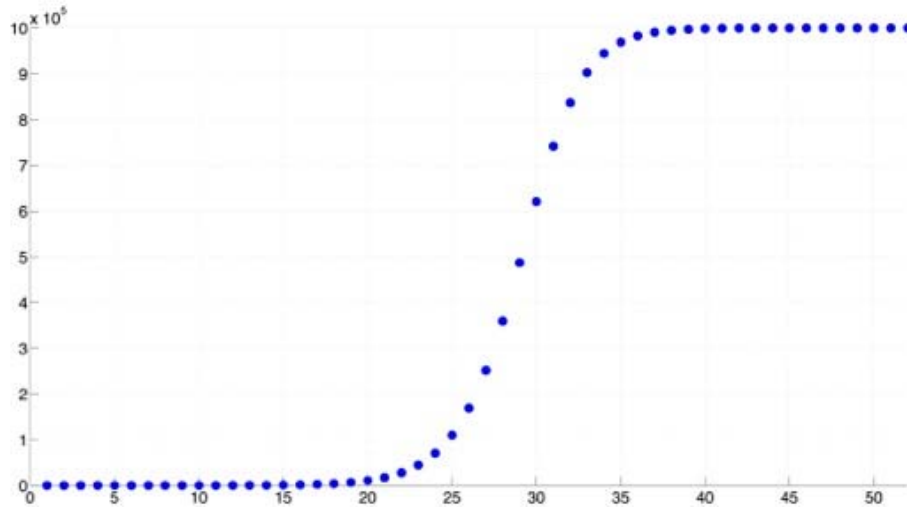
۴ پدیده اشباع

در قسمت‌های قبل، با در نظر گرفتن فرضیاتی، رشد شرکت (افزایش تعداد افرادی که در شرکت عضو هستند) را در طول زمان بررسی کردیم. یکی از این فرض‌ها این بود که اعضاء در یافتن و متقاعد کردن افراد جدید برای عضویت در شرکت مشکلی نخواستند داشت. این فرض به طور ضمنی به این معنی است که تعداد افرادی که عضو شرکت نیستند به نسبت اعضاء بسیار زیاد است، چون طبیعی است که کسی که عضو است مجدداً عضو نخواهد شد. دیدیم که در این حالت، یعنی تا وقتی تعداد اعضاء به نسبت کل افراد کم است، رشد شرکت بسیار سریع است و تعداد افراد در هر بازه زمانی ثابت (مثلاً هر هفته یا هر ماه) چند برابر می‌شود. به دنباله‌های این چنینی، دنباله‌های با رشد نمایی می‌گویند.

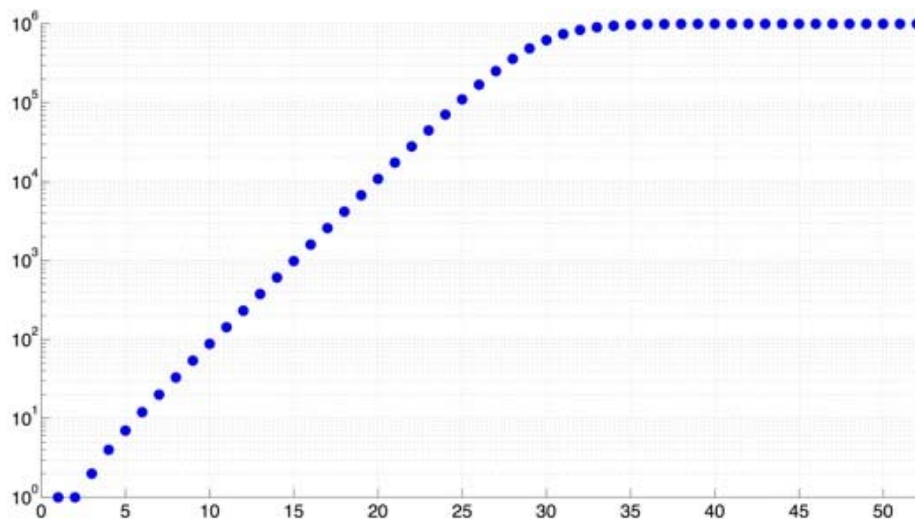
اما روشن است که با رشد شرکت دیر یا زود زمانی فرا می‌رسد که نسبت زیادی از افراد جامعه عضو شرکت هستند و لذا یافتن افراد جدید بسیار سخت می‌شود. به این پدیده «اشباع» می‌گوییم که باعث کند شدن قابل توجه رشد شرکت خواهد شد. هدف این قسمت بررسی پدیده اشباع، زمان و چه‌گونگی وقوع آن است.

برای شروع، مدلی تصادفی برای رشد شرکت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

مدل تصادفی ساده. فرض کنید جمعیت یک شهر فرضی یک میلیون نفر است. در آغاز تنها یک نفر از اهالی شهر عضو شرکت هرمی شده است. هر هفته، هر عضو شرکت که هنوز کم‌تر از دو زیرشاخه دارد، با یک نفر از شهروندان به تصادف ارتباط برقرار می‌کند و او را دعوت به عضویت می‌کند. هر کس که عضو شرکت نیست در صورت دعوت شدن، عضو شرکت می‌شود. (اگر از طرف چند نفر به‌طور هم‌زمان دعوت شد، دعوت یکی از آن‌ها را به تصادف می‌پذیرد.)



نمودار (۱)، که به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری مدل به دست آمده است، تعداد اعضای شرکت را در طول زمان نشان می‌دهد. محور افقی مربوط به شماره هفته و محور عمودی نشان‌دهنده تعداد اعضا است.



نمودار (۲) همان نمودار یک است اما محور عمودی آن به شکل خاصی مقیاس‌بندی شده است: هر یک واحد که در محور بالا می‌رویم عدد متناظر ده برابر می‌شود. (به چنین نمودارهایی نمودار لگاریتمی می‌گویند).

۴،۱ چرا در نمودار لگاریتمی قسمت اول نمودار شبیه خط راست است؟

۴،۲ به نظر شما در هفته چندم اشباع رخ داده است؟ برای جواب خودتان استدلال بیاورید.

۴،۳ قبل از آن که بقیه سؤال را بخوانید تعریف دقیقی برای زمان اشباع پیش‌نهاد و از آن دفاع کنید!

پس چرا دارید می‌خوانید؟! برگردید و به سؤال قبل پاسخ دهید!

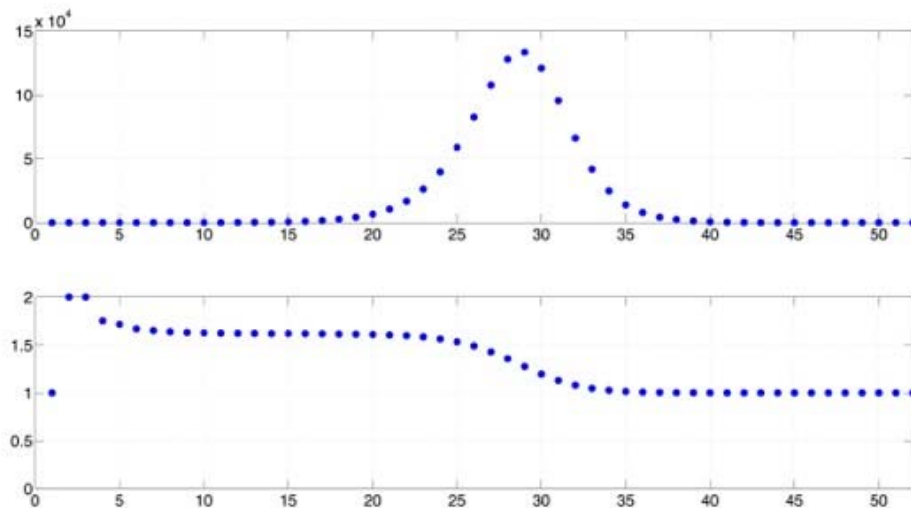
قبل از ادامه کار به چند تعریف زیر توجه کنید:

سرعت رشد: تعداد افراد جدیدی که در این هفته عضو شرکت شده‌اند.

نرخ رشد: نسبت تعداد اعضای شرکت در این هفته نسبت به هفته قبل (به عبارت دیگر: تعداد اعضا در این هفته چند برابر شده است).

۴،۴ چه رابطه‌ای بین نرخ و سرعت رشد وجود دارد؟

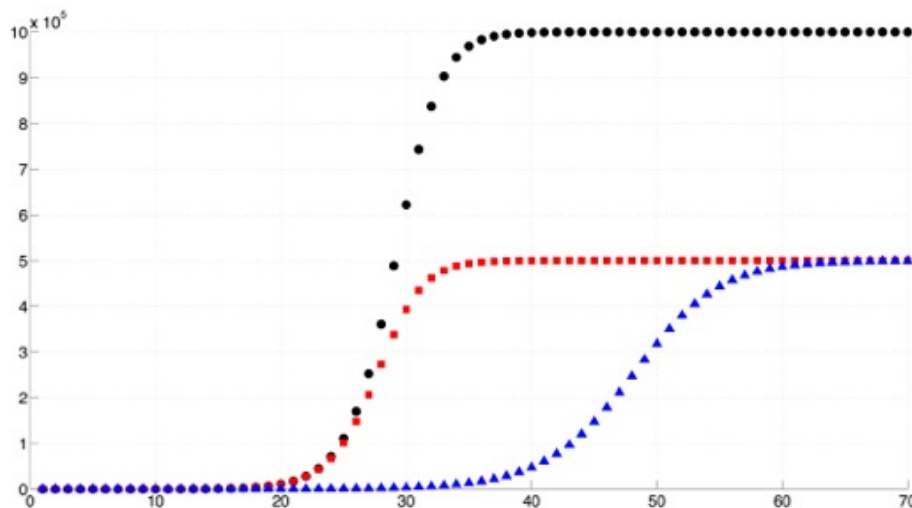
در شکل (۳) نمودار سرعت و نرخ رشد را برای مدل تصادفی ساده رسم کرده‌ایم. همان‌طور که می‌بینید سرعت رشد در هفته ۲۹م به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد و نرخ رشد از حوالی هفته ۲۳م شروع به کاهش می‌کند.



۴,۵ به نظر شما هر کدام از این زمان‌ها چه معنایی دارد؟ به این سؤال از زوایای مختلف نگاه کنید. مثلاً از نظر شرکت، از نظر کسانی که به شرکت می‌پیوندند یا از نظر مسئولان اقتصادی که در تلاشند از آسیب‌های اقتصادی ناشی از فعالیت شرکت‌های هرمی جلوگیری کنند.

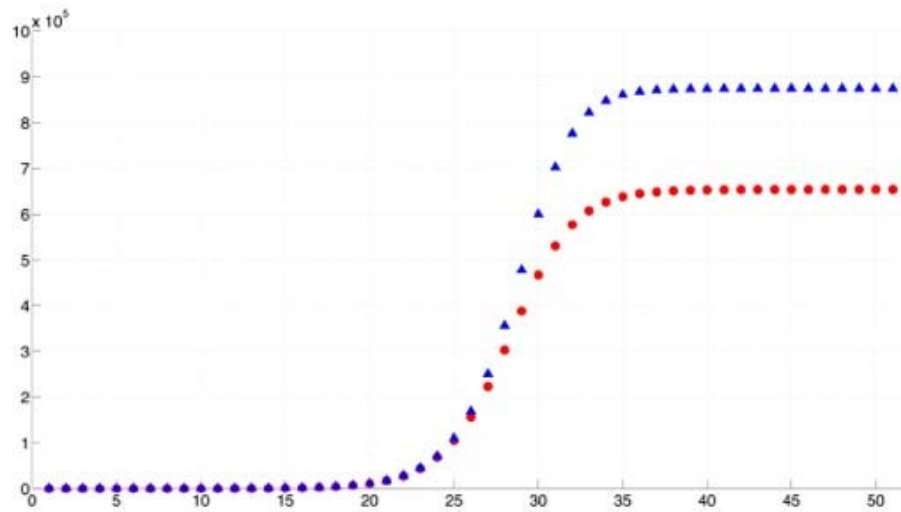
مدل تصادفی با فرهنگ‌سازی. فرض کنید دولت تصمیم گرفته با فرهنگ‌سازی (مثلاً ساختن برنامه‌های تلویزیونی) مردم را از خطرات عضویت در شرکت‌های هرمی آگاه سازد. در یک مدل ساده، اثر این کار را به این صورت در نظر گرفته‌ایم که نیمی از جمعیت شهر در اثر این برنامه‌ها دعوت به عضو شدن را رد می‌کنند.

۴,۶ به نظر شما کدام‌یک از نمودارهای مربعی یا مثلثی رشد شرکت را در این وضعیت بهتر توصیف می‌کند؟ چرا؟ (نمودار دایره‌ای همان نمودار ۱ است که قبلاً در مورد آن صحبت کرده‌ایم.)



مدل تصادفی با ناامیدی. در تلاش برای واقعی‌تر کردن مدل، به‌ویژه در هنگام پدیده‌اشباع، این نکته را هم در نظر می‌گیریم که اگر کسی k بار تلاش کند تا دیگران را عضو کند و این تلاش ناموفق باشد (به دلیل آن‌که افراد مورد دعوت، قبلاً عضو بوده‌اند یا تمایل به عضویت ندارند)، ناامید می‌شود و دست از تلاش بر می‌دارد.

نمودار زیر روند رشد شرکت را برای $k = 1$ و $k = 2$ (به ترتیب با دایره و مثلث) نشان می‌دهد.



۴,۷ آیا می‌توانید آستانه نهایی تعداد اعضای را بر حسب k به دست بیاورید؟

۴,۸ اگر مسأله فرهنگ‌سازی را با ناامیدی تلفیق کنیم، رفتار رشد شرکت چه‌گونه خواهد بود؟ سعی کنید نمودار رشد را حدس بزنید.

۴,۹ به نظر شما چه‌گونه می‌توان مدل را واقعی‌تر کرد؟ چند پیش‌نهاد ارائه دهید و در باره اولویت آن‌ها نظر خود را بگویید. این سؤال به‌نوعی جدی‌ترین سؤال این مسابقه است که توانایی مدل‌سازی شما را به‌چالش می‌کشد؛ یک مدل ریاضی خوب از طرفی باید جنبه‌های مهم مسأله واقعی را لحاظ کرده باشد و از طرفی یا باید به شکل تحلیلی قابل حل باشد و یا بتوان با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری آن را حل کرد و به نتایج نسبتاً درستی در مورد مسأله واقعی رسید.

۴,۱۰ سؤال‌هایی که در این آزمون به آن‌ها پرداخته شد یکی ساختار رشد درخت اعضای و محاسبه نسبت اعضای ضررکرده بود و دیگر سرعت رشد شرکت و زمان رخ دادن اشباع. در مورد شرکت‌های هرمی، چه سؤال‌های دیگری به ذهن شما می‌رسد که مطالعه آن‌ها می‌تواند مفید و جذاب باشد؟